

Grafos montes en patrones de pliegues origami

Katy Ohsiek & Ana Wright

septiembre 30, 2020

Definiciones

- ▶ Patrón de pliegues

Definiciones

- ▶ Patrón de pliegues
- ▶ Doble monte/doble valle

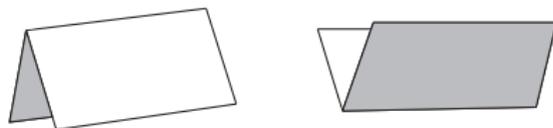
Definiciones

- ▶ Patrón de pliegues
- ▶ Doblez monte/doblez valle



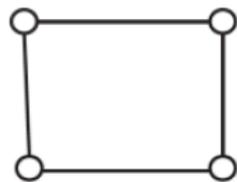
Definiciones

- ▶ Patrón de pliegues
- ▶ Doble monte/doble valle

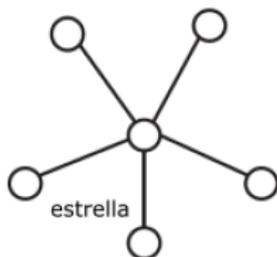


- ▶ Doble plano

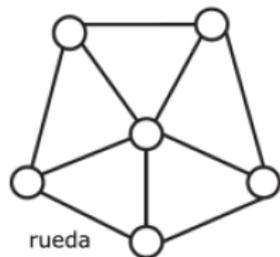
Familias de grafos



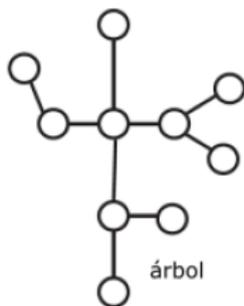
ciclo



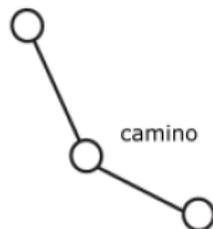
estrella



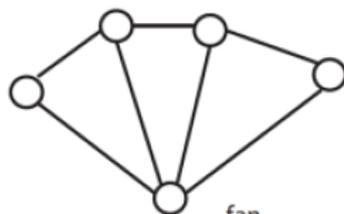
rueda



árbol



camino



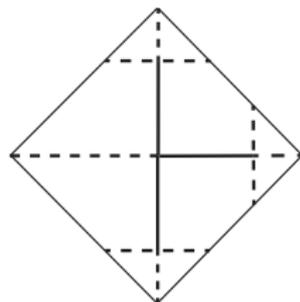
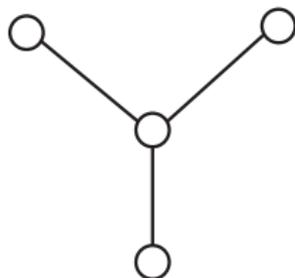
fan

Concepto nuevo

- ▶ Grafo monte: Un grafo G es un grafo monte si existe un patrón de pliegues P y una biyección de los vertices del grafo $V(G) \rightarrow$ los vertices de P donde se juntan doblajes, en que
 - ▶ los vertices son adyacentes en el grafo si y solo si sus imagenes son conectados con un doblaje monte
 - ▶ no hay doblajes montes que tocan el borde del papel

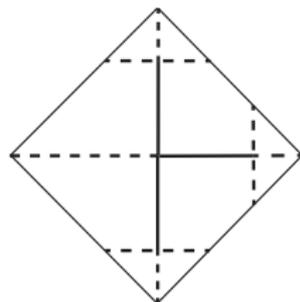
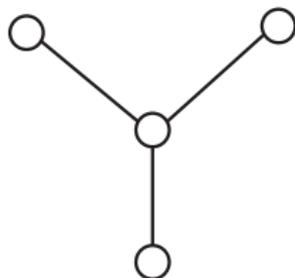
Concepto nuevo

- ▶ Grafo monte: Un grafo G es un grafo monte si existe un patrón de pliegues P y una biyección de los vertices del grafo $V(G) \rightarrow$ los vertices de P donde se juntan doblajes, en que
 - ▶ los vertices son adyacentes en el grafo si y solo si sus imagenes son conectados con un doblaje monte
 - ▶ no hay doblajes montes que tocan el borde del papel



Concepto nuevo

- ▶ Grafo monte: Un grafo G es un grafo monte si existe un patrón de pliegues P y una biyección de los vertices del grafo $V(G) \rightarrow$ los vertices de P donde se juntan doblajes, en que
 - ▶ los vertices son adyacentes en el grafo si y solo si sus imagenes son conectados con un doblaje monte
 - ▶ no hay doblajes montes que tocan el borde del papel



- ▶ Capacidad local de doblaje y capacidad global de doblaje

Teoremas útiles

Teorema (Teorema de Maekawa, 1986)

En un vertice v de un patrón de pliegues, deja que M sea el número de doblajes montes que son incidentes al vertice v y deja que V sea el número de doblajes valles que son incidentes al vertice v . Si v se puede doblar en plano, entonces

$$|M - V| = 2.$$

Teoremas útiles

Teorema (Teorema de Maekawa, 1986)

En un vertice v de un patrón de pliegues, deja que M sea el numero de doblajes montes que son incidentes al vertice v y deja que V sea el numero de doblajes valles que son incidentes al vertice v . Si v se puede doblar en plano, entonces

$$|M - V| = 2.$$

Teorema (Teorema de Kawasaki, 1980)

Deja que $\vec{v} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n})$ sea una sequencia de ángulos consecutivos entre los doblajes indcidentes a un vertice v . Entonces v se puede doblar en plano si y solo si

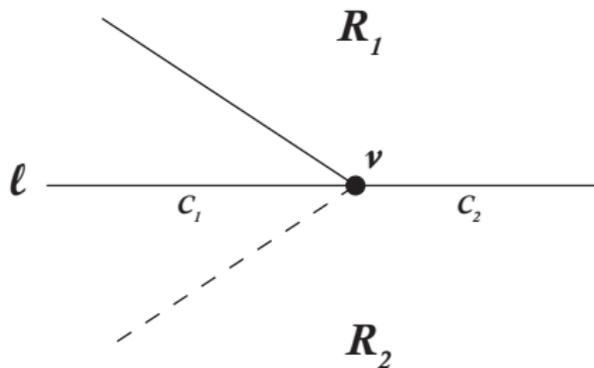
$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \dots - \alpha_{2n} = 0.$$

Lema

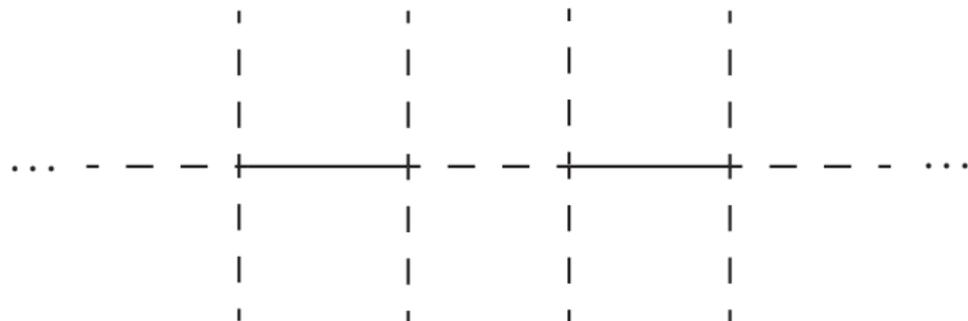
Deja que v sea un vertice con un doblaje recta ℓ a través de v . Si doblamos este doblaje primero, todos los otros doblajes incidentes a v tendrán un doblaje del tipo opuesto reflejado a través de ℓ .

Lema

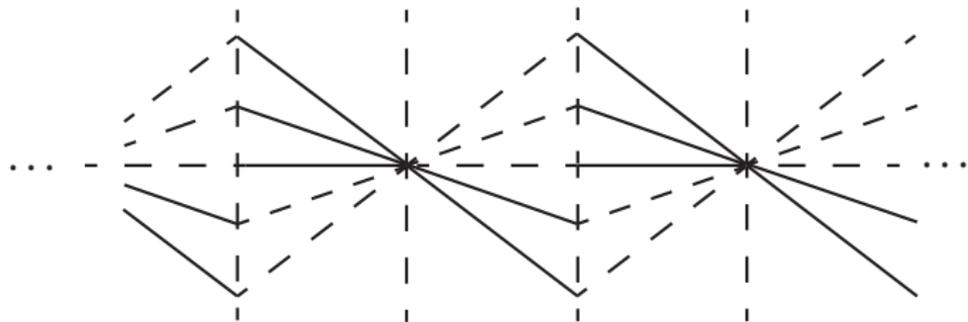
Deja que v sea un vertice con un doblaje recta ℓ a través de v . Si doblamos este doblaje primero, todos los otros doblajes incidentes a v tendrán un doblaje del tipo opuesto reflejado a través de ℓ .



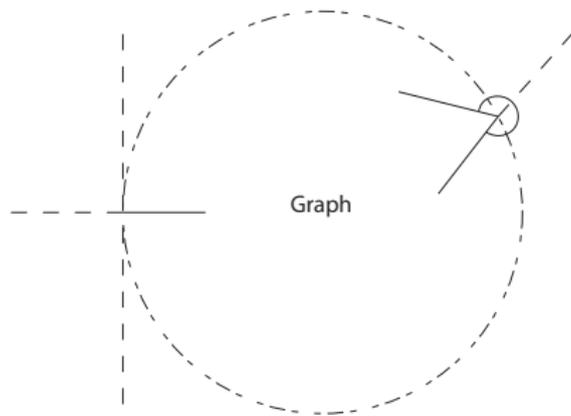
Patrones de pliegues que se doblan en plano globalmente



Patrones de pliegues que se doblan en plano globalmente



¿Existen grafos montes finitos que se doblan en plano globalmente? ¡No!

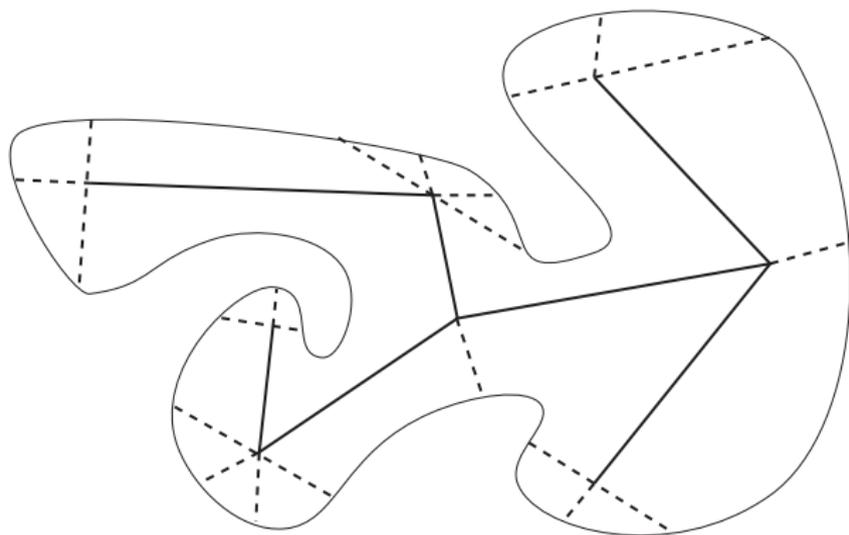


Grafos que se doblan en plano localmente

Hacemos un grafo y cortamos al rededor.

Grafos que se doblan en plano localmente

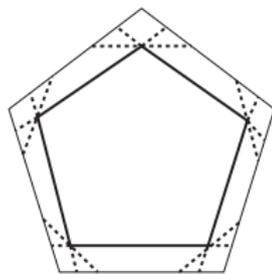
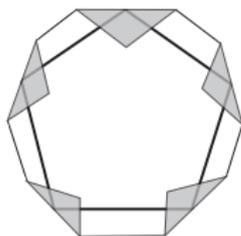
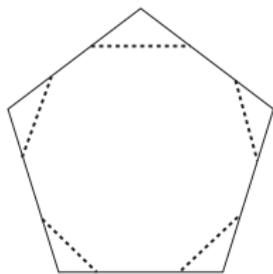
Hacemos un grafo y cortamos al rededor.



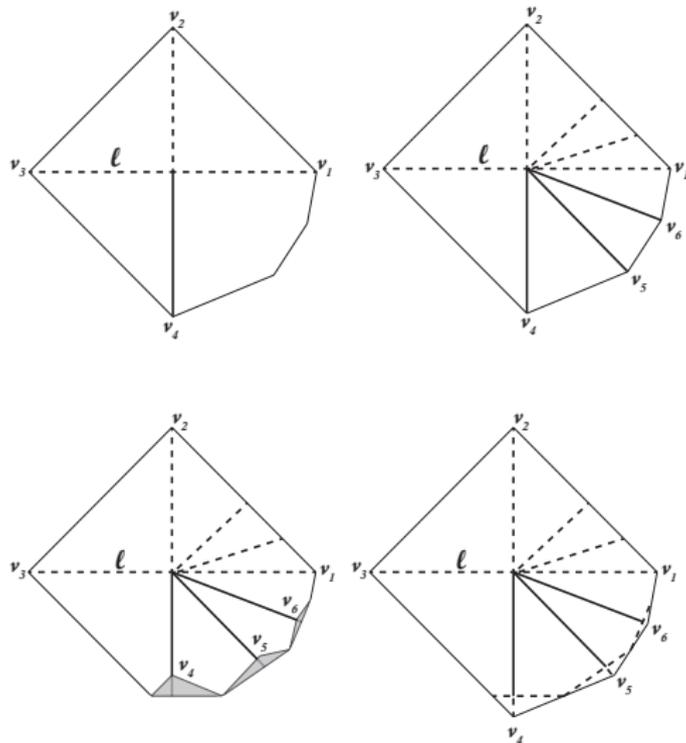
Grafos convexos montes

Grafos montes con patrón de pliegues que tenga borde de papel convexo

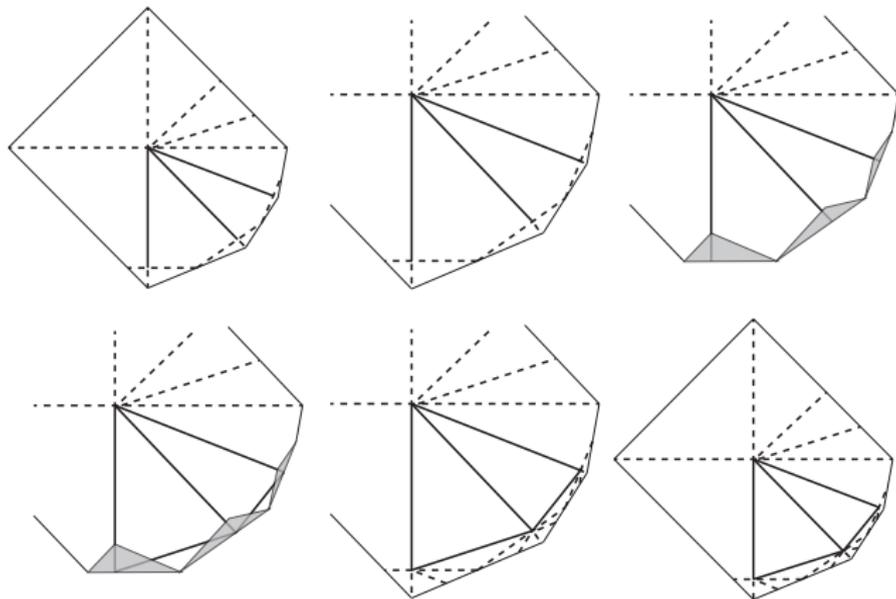
Grafos convexos montes



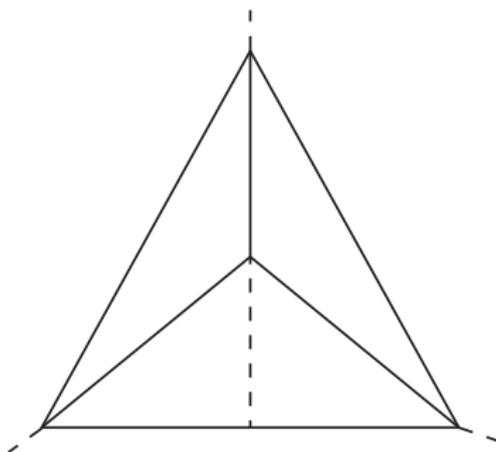
Grafos convexos montes



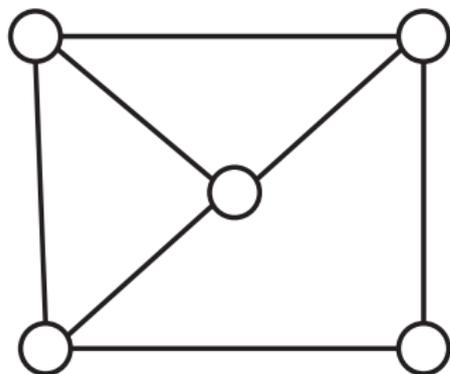
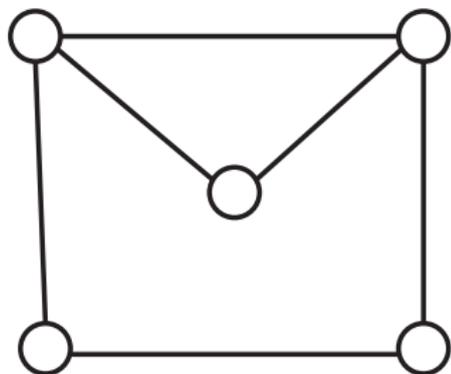
Grafos convexos montes



Grafos que no se pueden doblar en plano localmente



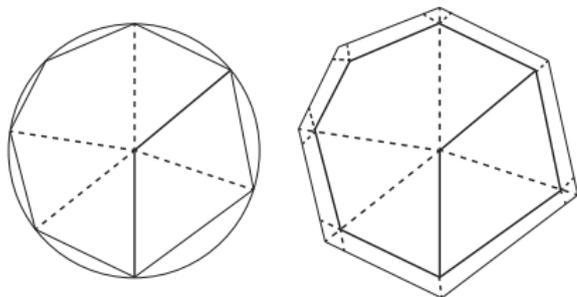
Grafo plano exterior



- ▶ ¿Todos los grafos montes son plano exterior?

- ▶ ¿Todos los grafos montes son plano exterior? no

- ▶ ¿Todos los grafos montes son plano exterior? no
- ▶ Ruedas rotas



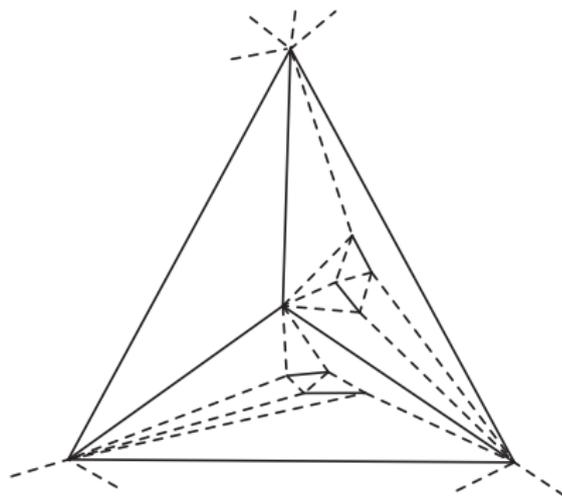
Cuestión de subgrafos

Cuestión de subgrafos

- ▶ ¿Los subgrafos de un grafo monte también son grafos montes?

Cuestión de subgrafos

- ▶ ¿Los subgrafos de un grafo monte también son grafos montes?



Fuentes

- [1] Thomas Hull. On the mathematics of flat origamis. In *Proceedings of the Twenty-fifth Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Boca Raton, FL, 1994)*, volume 100, pages 215–224, 1994.
- [2] Thomas Hull. Counting mountain-valley assignments for flat folds. *Ars Combin.*, 67:175–187, 2003.
- [3] Thomas C. Hull. The combinatorics of flat folds: a survey. In *Origami³ (Asilomar, CA, 2001)*, pages 29–38. A K Peters, Natick, MA, 2002.
- [4] Sin-Min Lee, Ho Kuen Ng, and Siu-Ming Tong. On friendly index sets of broken wheels with three spokes. *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 74:13–31, 2010.
- [5] Andrzej Proskurowski and Maciej M. Sysł o. Efficient vertex- and edge-coloring of outerplanar graphs. *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, 7(1):131–136, 1986.